BAC 1999 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1/a- Drésser le tableau de variation de f et tracer sa courbe representative C_f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α telle que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2/ On appelle g la restriction de f à IR^+.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie dans $]1;2]$

b- Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à $]1;2]$.

c- Tracer la courbe C' de g^{-1} dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3/ Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $\varphi(x) = \int_0^{tgx} f(t)dt$.

a- Montrer que φ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que $\varphi'(x) = tg^2x + 2$.

b- Calculer alors $\varphi(x)$.

c- En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = 0, x = 1$ et $y = 1$.

EXERCICE 2 (4 points)

Pour tout entier naturel non nul,on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx$.

1/a- $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall n \in IN$, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (tgx)^{n+1}$.

b- En déduire que, $\forall n \in IN$, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2/a- Montrer que $\forall n \in IN$, on a $I_n \geq 0$. En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3/ Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = Log(\cos x)$.

a- Calculer $g'(x)$ où g' la fonction dérivée de g sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

b- En déduire I_1 et I_3.